

Unidad N° 5

Tensiones Normales en Vigas Flexión

5.1. Objetivos

Al terminar el estudio de esta unidad usted deberá ser capaz de resolver los siguientes objetivos trazados para el Estudio de tensiones normales en secciones de viga.

1. Determinar la ecuación que gobierna las tensiones normales debido a la flexión en vigas
2. Dibujar la distribución de tensiones normales en cualquier sección transversal de una viga.
3. Dimensionar cualquier sección de viga transversal capaz de soportar los esfuerzos normales inducidos por la presencia de momentos flectores.
4. Determinar el Modulo Resistente para cualquier sección transversal de viga
5. Determinar la capacidad de carga que es capaz de resistir cualquier sección debido a la flexión.

5.2. Introducción

Las vigas son elementos estructurales cuyo principal objeto es transportar cargas a través de su sección transversal. Cuando las cargas flexionan a la viga, estas en su interior producen momentos flectores y fuerzas cortantes en la sección trasversal que son los que mantienen el equilibrio el sistema.

El objetivo principal de esta unidad es establecer la relación que existe entre el momento flector que actúa en la sección transversal y la distribución de tensiones normales que se producen en ella, basándonos en las siguientes suposiciones:

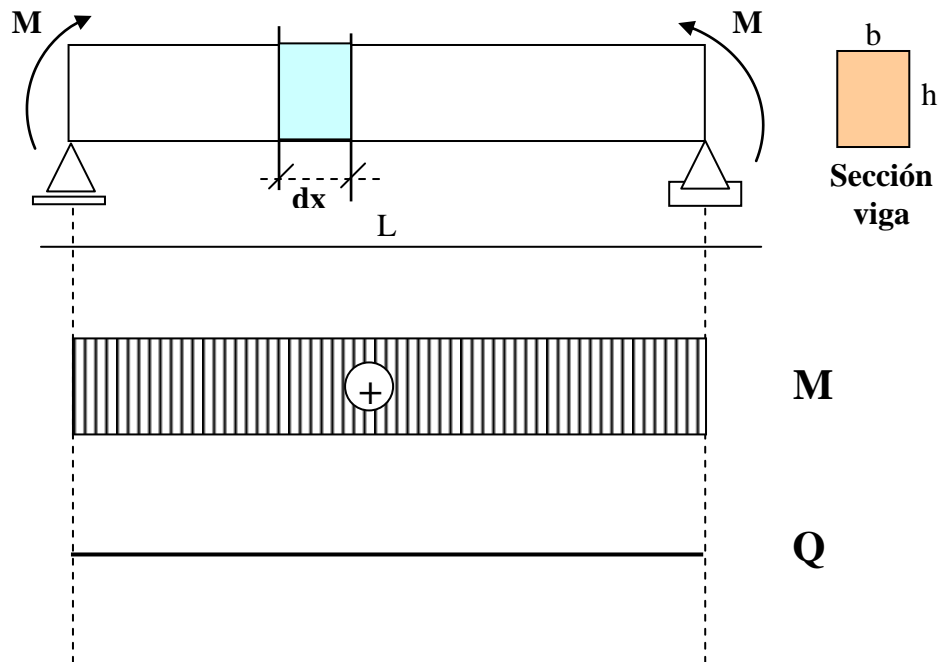
- El material de la viga es homogéneo, isótropo y obedece la ley de Hooke.
- El modulo de elasticidad “E” es el mismo a tracción que a compresión.

- Las secciones transversales de la viga permanecen planas después de la flexión.
- La sección transversal de la viga es simétrica con respecto al plano de aplicación de las cargas y constante en toda su longitud.
- Las cargas no ocasionan torsión ni pandeo en la viga.

En conclusión. **La Flexión estudia los esfuerzos internos normales originados por la presencia de momentos flectores en la sección transversal de viga. A estos esfuerzos internos normales se los denomina Tensiones normales o Tensiones de Flexión en vigas.**

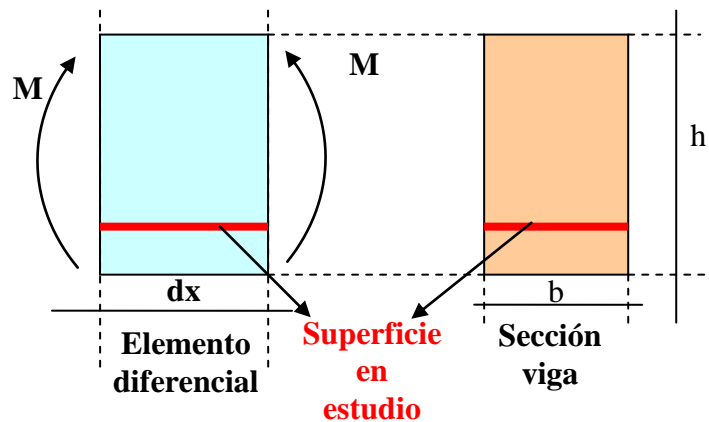
5.3. Formulación

Supongamos una viga simplemente apoyada de sección recta sometida a flexión pura, ósea que solo necesita la presencia de momentos flectores en el interior de la viga para mantener su equilibrio en el sistema en toda la longitud y como muestra los diagramas a continuación donde fuerzas cortantes no existe.



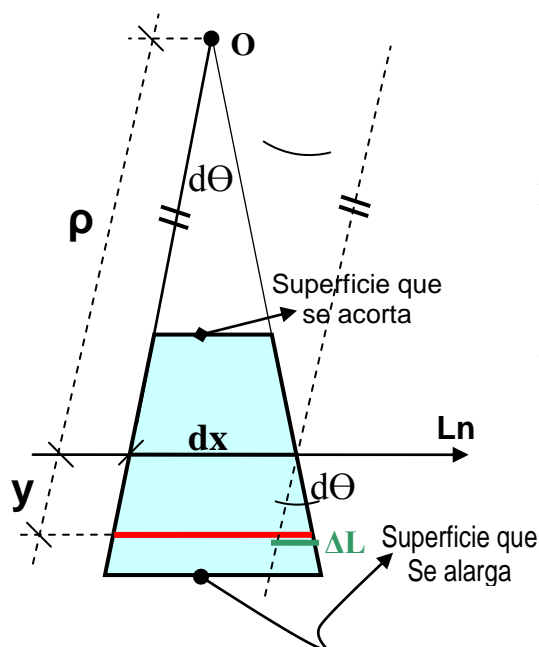
Lo que queremos encontrar es una relación que nos vincule el momento flector que se produce en cualquier sección transversal, con sus respectivas respuesta interna de tensiones normales. Para el análisis tomemos un elemento diferencial de la viga, para ello cortémosla en dos secciones transversales contiguas separadas en “ dx ”, debido a que solo existe momentos

flectores en la viga es que el sistema se puede equilibrar como muestra la figura y analizaremos cual es la respuesta a deformación, como a equilibrio de de fuerzas de la superficie en estudio.



a) Parte geométrica

Lo que pretendemos es plantear una ecuación de compatibilidad de deformación partiendo de ver como se deforma la superficie en estudio, imaginémosnos como puede deformar el momento al elemento diferencial, manteniendo las secciones planas en este proceso, de la figura que se muestra a continuación podemos plantear las siguientes conclusiones.



ΔL = Deformación de la superficie de análisis

L_n = Línea neutra.

dx = Longitud inicial del elemento diferencial.

ρ = Radio de curvatura.

y = Ubicación de la superficie de análisis
respecto a la L_n .

$d\theta$ = Angulo de deformación.

Si analizamos el esquema del elemento diferencial deformado vemos que la superficie superior se acorta y la superficie inferior se alarga, es lógico suponer que existe entre ambas una superficie que no se acorta, ni se alarga. A esta superficie se la denomina **Superficie Neutra**, mas conocida como **Línea Neutra**.

Ahora veamos que ha sucedido con la superficie de análisis y plantemos una ecuación de deformación.

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad (a)$$

ε = Deformación unitaria

ΔL = Deformación de la sup. de análisis.

$$L = dx = \rho d\theta \quad (b)$$

L = Longitud del elemento diferencial.

$$\Delta L = y d\theta \quad (c)$$

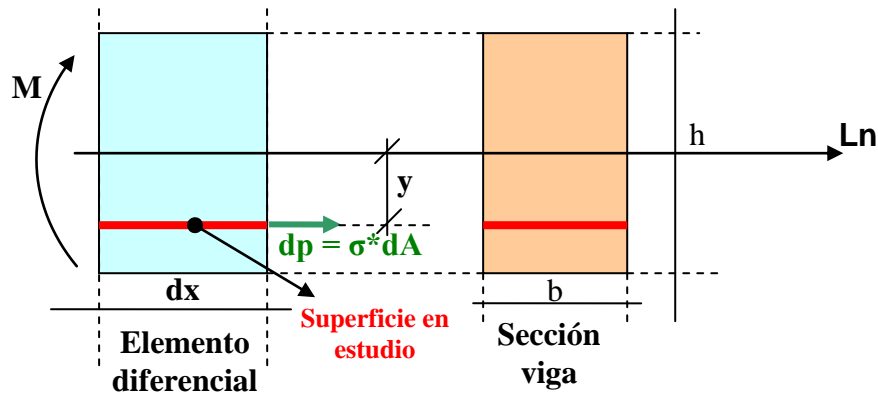
reemplazando (c) y (b) en (a) Tenemos:

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}$$

Ecuación de compatibilidad de deformación (A)

b) Parte Estática

Para encontrar la fuerza interna que equilibra el momento, se parte del conocimiento de que fuerzas internas produjeron la deformación en la sección de análisis veamos nuevamente el esquema de análisis.



$$\sum M_{Ln} = 0$$

$$M - \int_A \sigma * y * dA = 0$$

$$M = \int_A \sigma * y * dA$$

Ecuación de equilibrio estático (B)

c) Parte Física (Ley de Hooke)

$$\sigma = E * \varepsilon$$

Ecuación Física

(C)

d) Parte Final

Remplazamos la expresión (A) en (C)

$$\sigma = E * \frac{y}{\rho} \quad (D)$$

esta ecuación muestra que las tensiones normales varían linealmente con la distancia desde la línea neutra.

remplazamos la expresión (D) en (B)

$$M = \int_A E * \frac{y}{\rho} * y * dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 * dA$$

sabemos de la unidad Geometría de la Masas contenida en la materia isostática que la expresión dentro la integral representa la inercia respecto a la Ln:

$$I_{Ln} = \int_A y^2 * dA \quad \text{Inercia en Ln.}$$

Remplazando la I_{Ln} en la expresión anterior tenemos:

$$M = \frac{E}{\rho} I_{Ln} \longrightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E * I_{Ln}} \quad (E)$$

esta ecuación se la conoce con el nombre de **Radio de curvatura** y será la base para encontrar la ecuación que gobierna las deformaciones en vigas, mas conocida como la **Ecuación de la Elástica** que lo verán en Mecánica de los materiales 2.

Remplazando la expresión (E) en (D) tenemos:

$$\sigma = E * y * \frac{M}{E * I_{Ln}} \longrightarrow \sigma = \frac{M * y}{I_{Ln}}$$

**Ecuación de Tensiones
Normales en Vigas
o
Tensiones de Flexión**

(7.1.)

que es la Ecuación que gobierna las Tensiones normales en cualquier sección de viga y nos vincula las tensiones normales con los momentos flectores actuantes. La cual nos indica que la

tensión debida a flexión en cualquier sección es directamente a la distancia del punto considerado a la línea neutra:

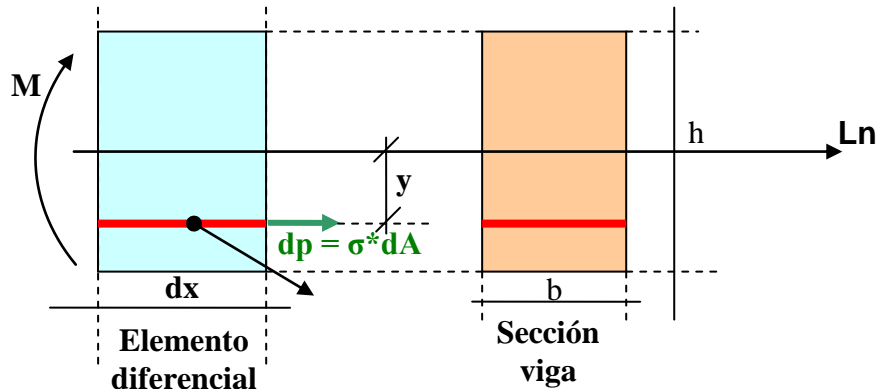
σ = Tensiones Normales o de Flexión

M = Momento Flector actuante en la sección

I_{Ln} = Inercia en la línea neutra.

y = Distancia de la línea neutra a la superficie análisis

Si analizamos la expresión de tensiones de flexión vemos que la distancia de la línea neutra a la superficie de análisis (y) no esta definida, ya que no se conoce la ubicación de la Ln , para encontrar esta ubicación volvamos al esquema presentado en la parte estática:



$$\sum F_H = 0$$

$$\int_A \sigma * dA = 0$$

reemplazando la expresión (D) tenemos:

$$\int_A \frac{E * y}{\rho} * dA = 0$$

los términos E , ρ son constantes y distintos de cero, sacando los de la expresión tenemos:

$$\frac{E}{\rho} \int_A y * dA = 0$$

Si:

$$\frac{E}{\rho} \neq 0 = \text{Const}$$

$$\int_A y^* dA = 0 \quad \text{Momento Estático}$$

cuya expresión quedo definida en la unidad geometría de las masas en la materia Isostática como **momento estático**, para que este se igual a cero necesariamente “y” tiene que ser igual acero y para que pase eso obligatoriamente la Ln debe pasar por el centro de gravedad de la sección ósea:

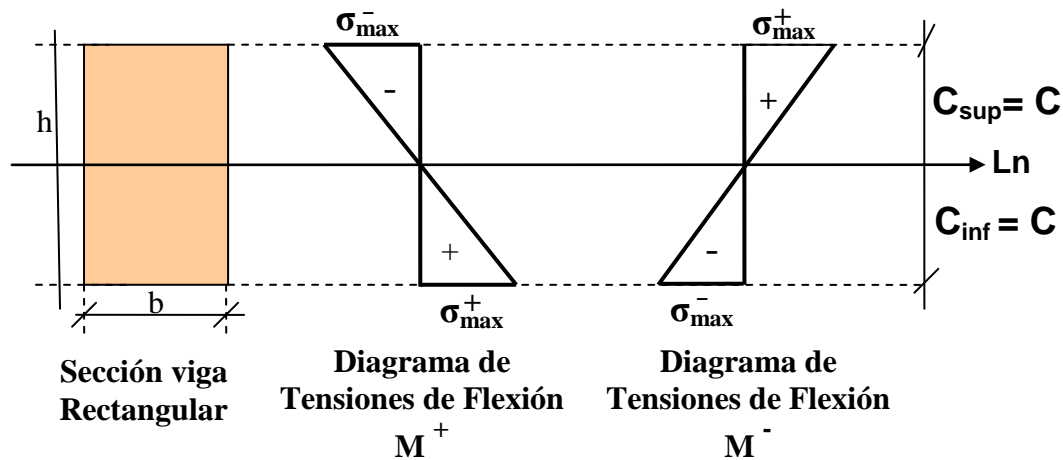
$$\text{Ln} = \text{Centro de gravedad de la sección}$$

(7.2.)

5.4. Construcción del diagrama de tensiones

5.4.1. Secciones simétricas

Son aquellas secciones simétricas respecto a la línea neutra que coincide con el centro de gravedad de la sección, y cuyas tensiones varían linealmente con la distancia a la línea neutra, lo que ocasiona que las tensiones máximas de compresión y tracción sean de igual magnitud. Este tipo de secciones son útiles para materiales que tengan la misma resistencia a tracción que a compresión, ver Fig.



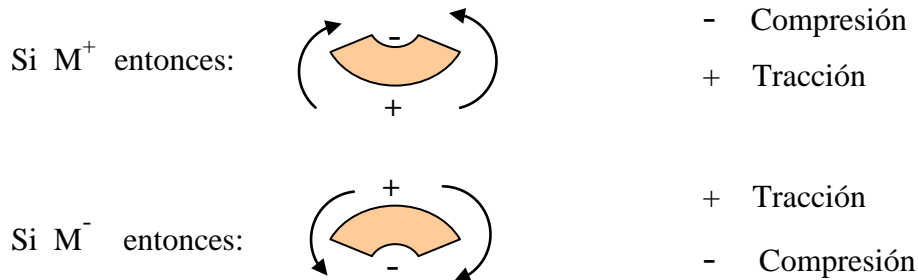
de las expresiones 7.1. y 7.2. tenemos:
$$\sigma = \frac{M^* y}{I_{Ln}}$$

Donde: $C_{\text{inf}} = C_{\text{sup}} = C \longrightarrow \sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{max}}^+ = \sigma_{\text{max}}^- = \frac{M \cdot C}{I_{Ln}}$ (7.3.)

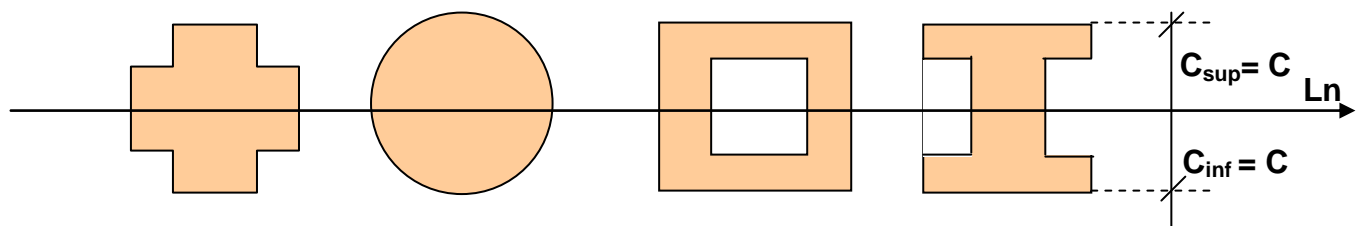
C = Fibra de la sección mas alejada de la Ln .

σ_{max}^+ = Tensión normal máxima de tracción

σ_{max}^- = Tensión normal máxima de compresión

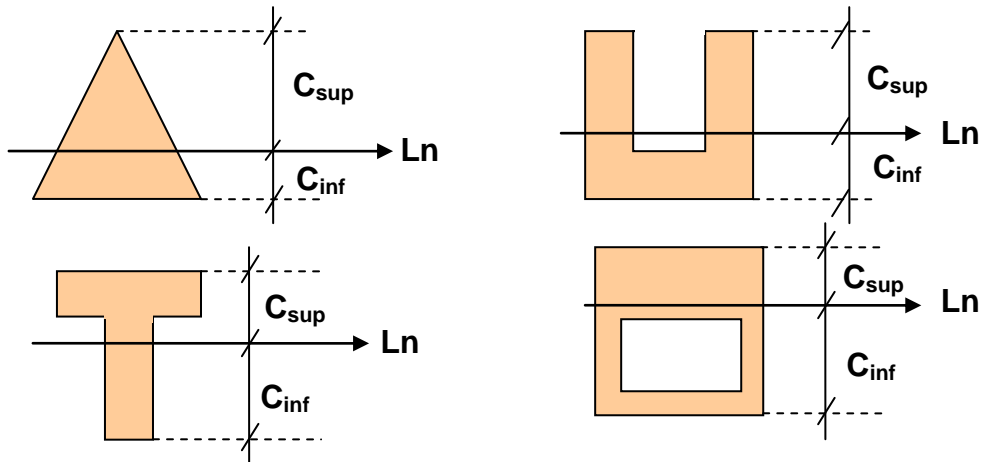


• Ejemplos de secciones Simétricas



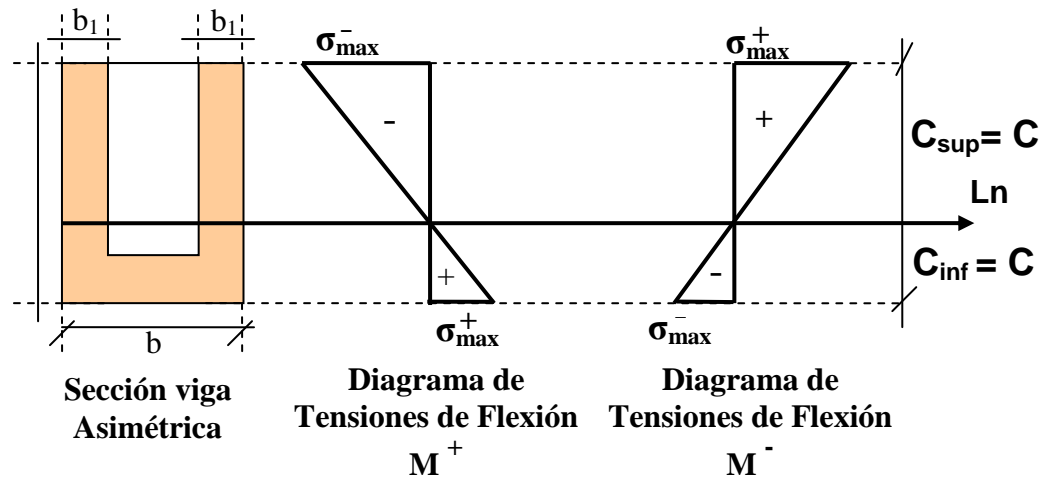
5.4.2. Secciones asimétricas

Son aquellas secciones asimétricas respecto a la línea neutra la cual debe coincidir con el centro de gravedad de la sección, y cuyas tensiones varían linealmente con la distancia a la línea neutra, esta asimetría ocasiona que las tensiones máximas de compresión y tracción sean de diferente magnitud. Este tipo de secciones son útiles para materiales que no tengan la misma resistencia a tracción que a compresión, ver Fig.

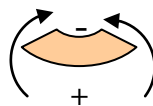


Entonces: $C_{sup} \neq C_{inf} \Rightarrow \sigma_{max}^+ \neq \sigma_{max}^-$

Quedando la expresión 7.1. y 7.2. de la siguiente manera para cada estado tensional máximo mostrado en el siguiente esquema:



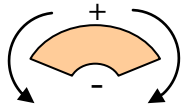
Si el M^+ entonces:



$$\sigma_{max}^+ = \frac{M^+ C_{inf}}{I_{Ln}}$$

$$\sigma_{max}^- = \frac{M^+ C_{sup}}{I_{Ln}}$$

Si el M^- entonces:

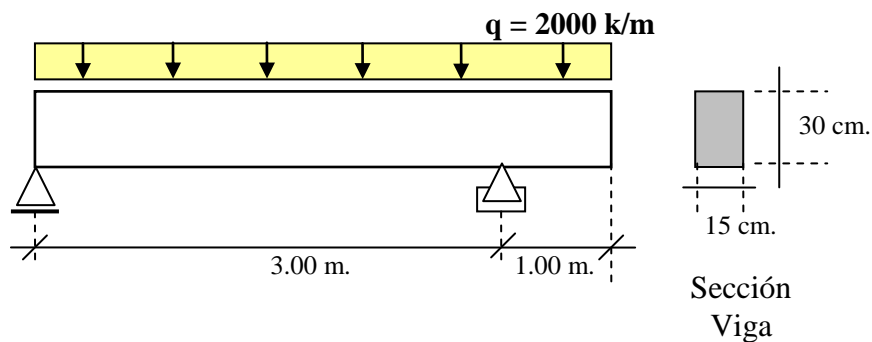


$$\sigma_{\max}^+ = \frac{M^- C_{\text{sup}}}{I_{Ln}}$$

$$\sigma_{\max}^- = \frac{M^- C_{\text{inf}}}{I_{Ln}}$$

Ejemplo 1

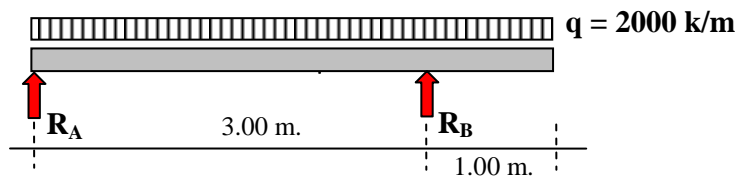
Sea la viga mostrada en la Fig. Determinar el diagrama de tensiones de flexión máximas en la sección de máxima solicitación.



Solución:
$$\sigma = \frac{M_{\max} * C}{I_{Ln}} \quad (7.3.)$$

a) Cálculo de momento máximo (M_{\max})

- Cálculo de reacciones



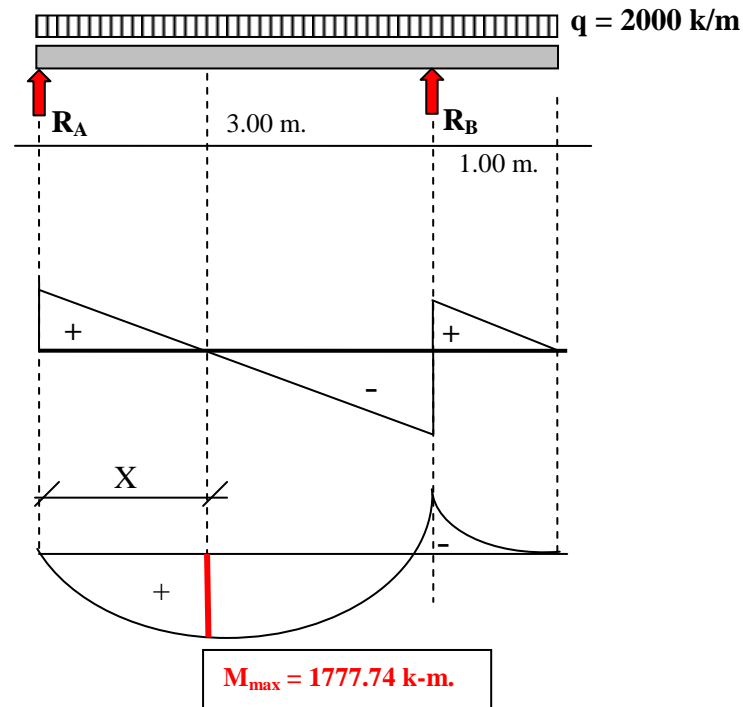
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 2000 * 4 * 2 - R_B * 3 = 0$$

$$R_B = 5333.33 \text{ k}$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow 5333.33 - 2000 * 4 + R_A = 0$$

$$R_A = 2666.67 \text{ k}$$

- Diagramas Q y M



- $M_{\max}^- = 2000 * 1 * 0.5 \Rightarrow M_{\max}^- = 1000 \text{ k-m}$

- $R_A - 2000 * X = 0 \Rightarrow X = 1.34 \text{ m.}$

$$M_{\max}^+ = M_{X=1.34} = R_A * X - 2000 * \frac{1.34^2}{2} \Rightarrow M_{\max}^+ = 1777.74 \text{ k-m.}$$

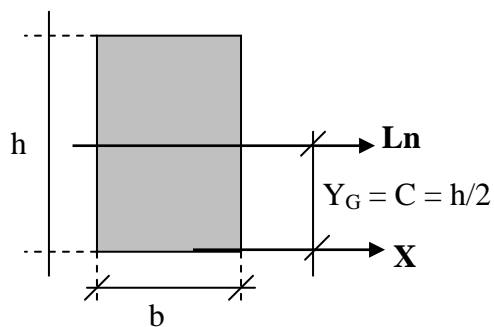
- $M_{\max} \leq M_{\max}^+, M_{\max}^-$

$$M_{\max} = M_{\max}^+ = 1777.74 \text{ k-m} = 177774.00 \text{ k-cm.}$$

(a)

b) Ubicación de la línea neutra

Por ser sección simétrica coincide con la mitad de la sección ósea:



$$C = 15.00 \text{ cm.}$$

(b)

c) Inercia en la línea neutra

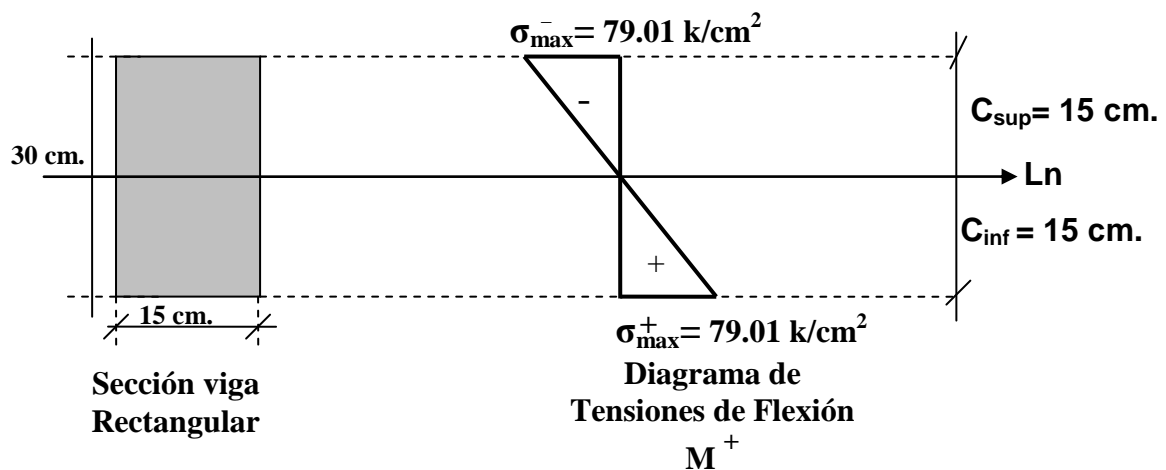
Como coincide la inercia del baricentro con la inercia de la línea neutra y sabemos de isostática que para una sección rectangular la inercia del baricentro es:

$$I_x^G = I_{Ln} = \frac{b * h^3}{12} \longrightarrow I_{Ln} = 33750.00 \text{ cm}^4 \quad (c)$$

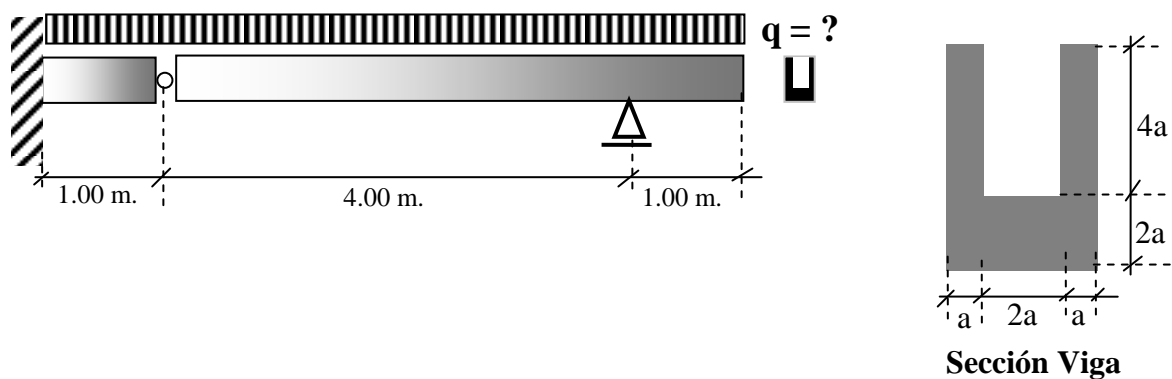
d) Diagrama de tensiones de flexión en la sección de máxima solicitación

Remplazando (a), (b), (c) en la expresión 7.3. tenemos:

$$\sigma_{\max}^+ = \sigma_{\max}^- = \frac{M_{\max} * C}{I_{Ln}} = \frac{177774 * 15}{33750.00} = 79.01 \frac{\text{k}}{\text{cm}^2}$$

**Ejemplo 2**

Sea la viga mostrada en la Fig. Determinar la carga máxima uniformemente repartida que es capaz de soportar la sección de viga.



Datos

$$\sigma_{adm}^+ = 800 \frac{\text{k}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_{adm}^- = 1200 \frac{\text{k}}{\text{cm}^2}$$

$$a = 5.00 \text{ cm.}$$

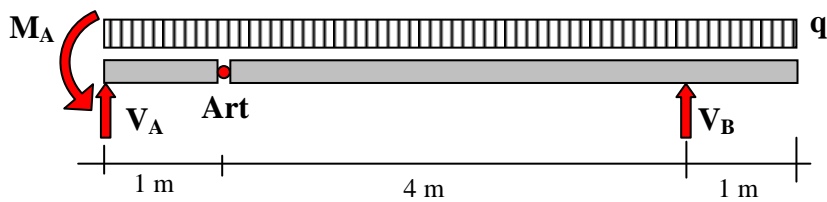
Incógnita

$$q_{\max} = ?$$

Solución:
$$\sigma = \frac{M_{\max} * C}{I_{Ln}} \quad (7.3.)$$

Calculo de momentos máximos (M_{\max})

- **Calculo de reacciones**

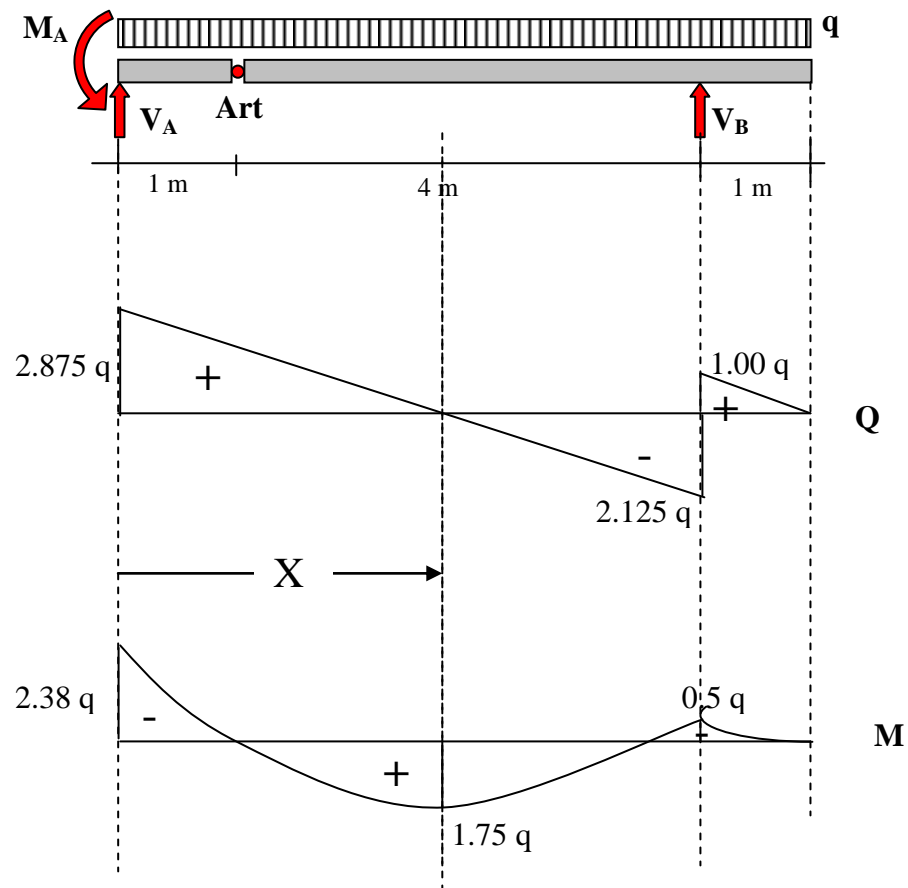


$$\sum M_{Art}^{der} = 0 \Rightarrow q * 5 * 2.5 - V_B * 4 = 0 \Rightarrow V_B = 3.125q$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow V_A + V_B - q * 6 = 0 \Rightarrow V_A = 2.875q$$

$$\sum M_{Art}^{izq} = 0 \Rightarrow -q * 1 * 0.5 + V_A * 1 - M_A = 0 \Rightarrow M_A = 2.38q$$

• Diagramas Q y M



• Determinación de momentos máximos

Calculo de la distancia X donde se produce el momento máximo positivo

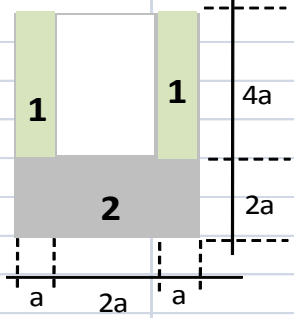
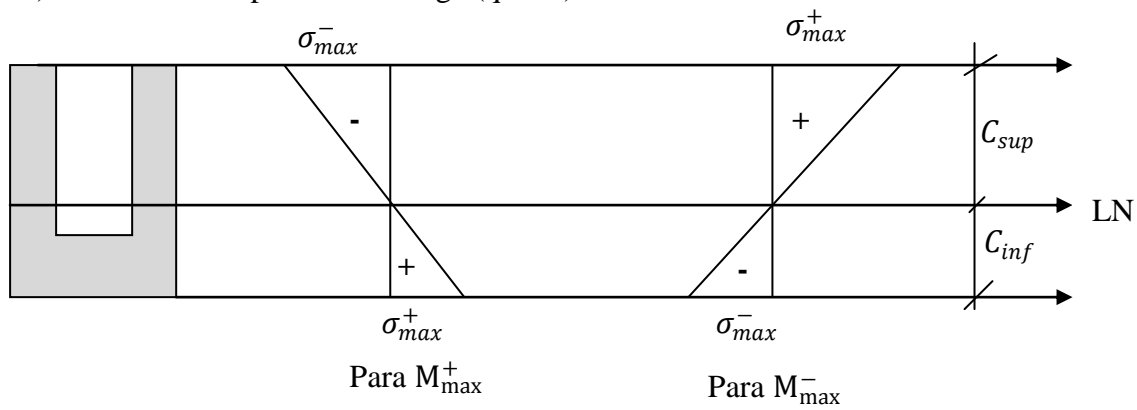
$$2.95q - qx = 0 \rightarrow x = 2.95 \text{ m}$$

$$M_{x=2.95}^+ = M_{\max}^+ = -2.38q + 2.875qx - q \frac{x^2}{2} = 1.75q$$

$$\begin{aligned} M_{\max}^+ &= 1.75q \\ M_{\max}^- &= 2.38q \end{aligned}$$

a) Geometría de las masas

Fig.	b	h	Ai	Yi	Ai.Yi	Ig	di	I _{ln}
1	2	4	8	4	32	10,67	1,5	28,67
2	4	2	8	1	8	2,67	1,5	20,67
Sumatorias			16		40			49,33
a = 5 cm								
	C _{inf} =	2,5	a =	12,5	cm			
	C _{sup} =	3,5	a =	17,5	cm			
	I _{LN} =	49,33	a ⁴ =	30833	cm ⁴			


b) Calculo de capacidad de carga (q_{máx.})• Para M_{max} (+)

$$\sigma_{\max}^+ = \sigma_{\text{Adm}}^+ = \frac{M_{\max}^+ \times C_{\text{inf}}}{I_{\text{LN}}} = \frac{1.75q_1 \times C_{\text{inf}}}{I_{\text{LN}}} \rightarrow q_1 = \frac{\sigma_{\text{Adm}}^+ \times I_{\text{LN}}}{1.75 \times C_{\text{inf}} \times 100} = 11276.07 \text{ k/m}$$

$$\sigma_{\max}^- = \sigma_{\text{Adm}}^- = \frac{M_{\max}^+ \times C_{\text{sup}}}{I_{\text{LN}}} = \frac{1.75q_2 \times C_{\text{sup}}}{I_{\text{LN}}} \rightarrow q_2 = \frac{\sigma_{\text{Adm}}^- \times I_{\text{LN}}}{1.75 \times C_{\text{sup}} \times 100} = 12081.50 \text{ k/m}$$

• Para M_{max} (-)

$$\sigma_{\max}^+ = \sigma_{\text{Adm}}^+ = \frac{M_{\max}^- \times C_{\text{sup}}}{I_{\text{LN}}} = \frac{2.38q_2 \times C_{\text{sup}}}{I_{\text{LN}}} \rightarrow q_2 = \frac{\sigma_{\text{Adm}}^+ \times I_{\text{LN}}}{2.38 \times C_{\text{sup}} \times 100} = 5922.30 \text{ k/m}$$

$$\sigma_{\max}^- = \sigma_{\text{Adm}}^- = \frac{M_{\max}^- \times C_{\text{inf}}}{I_{\text{LN}}} = \frac{2.38q_2 \times C_{\text{inf}}}{I_{\text{LN}}} \rightarrow q_2 = \frac{\sigma_{\text{Adm}}^- \times I_{\text{LN}}}{2.38 \times C_{\text{inf}} \times 100} = 12436.84 \text{ k/m}$$

$$q_{\max} \leq q_1, q_2, q_3, q_4 \rightarrow \boxed{q_{\max} = 5922.30 \text{ k/m}}$$

5.5. Modulo resistente

Otra forma de expresar la ecuación de tensiones maximas debido a flexión es sustituir la distancia (y) por la C que es la distancia de la sección más alejada midiendo desde la línea neutra. Obteniendo la tensión máxima de flexión.

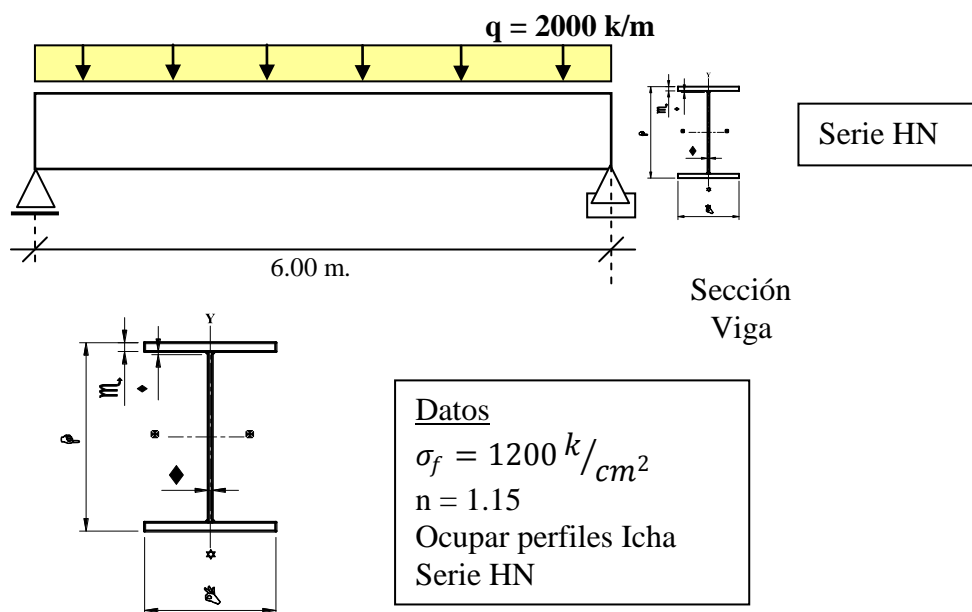
$$\sigma_{\max} = \frac{MC}{I_{Ln}} = \frac{M}{I_{Ln}/C} = \frac{M}{W}$$

El cociente $W = \frac{I_{Ln}}{C}$ se conoce como **Modulo Resistente**.

Esta ecuación es muy empleada en secciones de viga constante y en especial para vigas metálicas. Cada fabricante a confeccionado tablas de las secciones que produce (ver tablas adjuntas) de tal manera que determinado el modulo resistente que depende de la geometría de la sección y conociendo la tensión peligrosa dada por el fabricante se está en condiciones de elegir de su oferta de secciones de perfiles el cumpla con la condición de $W_{\text{calculo}} \leq W_{\text{Tabla}}$

Ejemplo 3

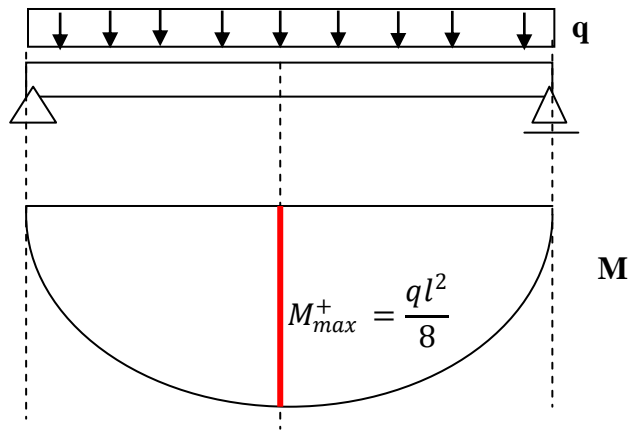
Determinar la sección del perfil metálico necesario para soportar la carga externa mostrada en la figura.



Solución:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{Adm}} = \frac{\sigma_f}{n} = \frac{MC}{I_{Ln}} = \frac{M}{I_{Ln}/C} = \frac{M}{W} \rightarrow W_{\text{Cal}} = \frac{n \times M_{\max}}{\sigma_f}$$

a) Cálculo de momento máximo



$$M_{\max} = \frac{2000 \times 6}{8} = 9000 \text{ k} - \text{m}$$

b) Cálculo de modulo resistente

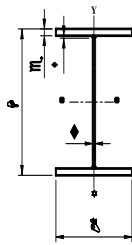
$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{Adm}} = \frac{\sigma_f}{n} = \frac{MC}{I_{Ln}} = \frac{M}{I_{Ln}/C} = \frac{M}{W} \rightarrow W_{\text{Cal}} = \frac{n \times M_{\max}}{\sigma_f}$$

$$W_{\text{Cal}} = \frac{n \times M_{\max}}{\sigma_f} = \frac{1.15 \times 900000}{1200} = 862.5 \text{ cm}^3$$

Entrado a la tabla de perfiles Icha IN para vigas obtenemos los valores, los que deben cumplir:

$$W_{\text{Cal}} \leq W_{\text{Tabla}}$$

Existiendo varias posibilidades, las que más se aproximan al modulo resistente calculado, las detallaremos en la siguiente tabla:



VIGAS SOLDADAS SERIE IN Propiedades Para el Diseño

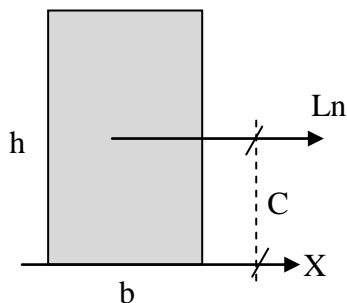
Designación		Dimensiones			Sección total									
IN H * peso		B	e	t	Area	Eje x-x			Eje y-y			Flexiòn		Sold.
					A	I	W	i	I	W	i	i _a	i _t	Smin
cm *	kgf/m	mm	mm	mm	cm ²	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm	cm	cm	mm
IN 40 *	49,3	200	10	6	62,8	18000	898	16,90	1330	133,0	4,61	5,45	0,500	5
IN 35 *	53,0	200	12	6	67,6	15400	883	15,10	1600	160,0	4,87	5,63	0,686	5
IN 25 *	72,7	200	20	6	92,6	11100	886	10,90	2670	267,0	5,37	6,14	1,600	6

De estos tres resultados elegiremos el de menor peso por ser el más económico, ósea:

IN 40*49.3

5.5.1 Modulo resistente de algunas figuras regulares

a) Sección Rectangular



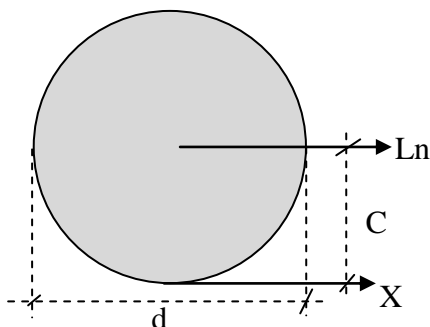
$$W = \frac{I_{Ln}}{C}$$

$$I_{Ln} = \frac{b \times h^3}{12}$$

$$C = \frac{h}{2}$$

$$W_{\blacksquare} = \frac{b \times h^2}{6}$$

b) Sección Circular



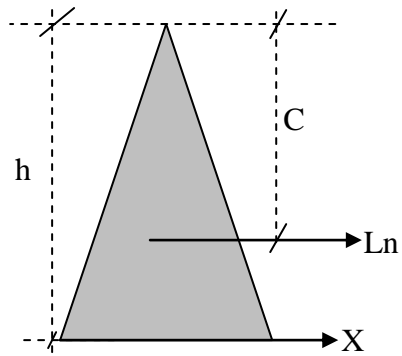
$$W = \frac{I_{Ln}}{C}$$

$$I_{Ln} = \frac{\pi \times d^4}{64}$$

$$C = \frac{d}{2}$$

$$W_{\circ} = \frac{\pi \times d^3}{32}$$

c) Sección Triangular



$$W = \frac{I_{Ln}}{C}$$
$$I_{Ln} = \frac{b \times h^3}{36}$$
$$C = \frac{2}{3} \times h$$
$$W_{\Delta} = \frac{b \times h^2}{24}$$